МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, информационных систем и программного обеспечения

Методические указания
к самостоятельной работе и выполнению расчетно-графических работ

Дисциплина Б1.О.05.04 Вычислительная математика и численные методы
код и наименование дисциплины

Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
код и наименование направления подготовки /специальности

Направленность (профиль) Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем
наименование направленности (профиля) /специализации образовательной программы

Квалификация выпускника бакалавр
указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ФГОС ВО

Мурманск
2020

Составитель – Авдеева Елена Николаевна, доцент кафедры МИСиПО Мурманского государственного технического университета

Методические указания к самостоятельной работе и выполнению РГР рассмотрены и одобрены на заседании кафедры-разработчика: МИСиПО
29.06.2020, протокол № 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика и численные методы» студенты должны:

- знать основные правила вычисления приближенных значений величин;
- уметь оценивать погрешность полученного результата;
- знать основные методы решения нелинейных уравнений;
- уметь решать системы линейных алгебраических уравнений;
- знать основы интерполирования функций, заданных таблично;
- иметь представление об основных методах численного интегрирования и уметь использовать квадратурные формулы на практике;
- знать численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и иметь навыки их использования;
- иметь представление о численных методах решения дифференциальных уравнений с частными производными (уравнений математической физики).

Данные методические рекомендации включают справочный материал, необходимый для выполнения расчетно-графических работ (РГР) № 1 и № 2, и решение примерного варианта каждой работы, в которых имеются ссылки на используемый справочный материал.

Перед выполнением РГР необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением рекомендованных задач в соответствии со ссылками на литературу, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта РГР.

ЗАДАНИЯ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ № 1.

РГР № 1 состоит из четырех задач. Задание для каждой задачи включает в себя ее формулировку и десять вариантов исходных данных.

Задача 1. Даны приближенные значения величин x и y и известно, что абсолютная погрешность $\Delta(x) = N/50$, а относительная погрешность $\delta(y) = N\%$ (здесь и далее N – номер варианта). Требуется:

1) вычислить значение величины $s = \dfrac{(N+1)\cdot x - y}{x + N\cdot y}$, оценить предельную абсолютную погрешность $\Delta(s)$ и округлить значение s в соответствии с погрешностью;

2) вычислить приближенное значение функции $f(x, y) = \ln(x + N)\cdot(N + y^2)$, оценить предельную абсолютную погрешность значения функции и округлить его в соответствии с погрешностью.

Номер варианта	Значения величин x и y	Номер варианта	Значения величин x и y
1	$x = 3{,}5;\ y = 0{,}48$	2	$x = 4{,}1;\ y = 0{,}29$
3	$x = 2{,}6;\ y = 0{,}54$	4	$x = 1{,}4;\ y = 0{,}75$
5	$x = 1{,}7;\ y = 0{,}42$	6	$x = 6{,}5;\ y = 0{,}22$
7	$x = 5{,}2;\ y = 0{,}35$	8	$x = 3{,}8;\ y = 0{,}72$
9	$x = 2{,}3;\ y = 0{,}62$	10	$x = 5{,}9;\ y = 0{,}36$

<u>Задача 2.</u> Дано уравнение $N \cdot x^3 + x - N/3 = 0$ (N – номер варианта). Требуется:

1) определить число корней уравнения и найти промежутки их изоляции;

2) вычислить значение одного из корней уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ при помощи метода деления отрезка пополам.

<u>Указание</u>. Все промежуточные вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой.

<u>Задача 3.</u> Решить трёхдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки и проверить ответ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 25. \\ 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 45 \\ 4x_4 + 5x_5 = 41 \end{cases}$$

<u>Задача 4.</u> Дана таблица значений функции $f(x)$:

x_i	$N - 0{,}7$	$N - 0{,}3$	$N + 0{,}1$	$N + 0{,}5$	$N + 0{,}9$
$f(x_i)$	$N/3$	$N/6$	$N/7$	$N/5$	$N/2$

(N – номер варианта).

Требуется:

1) по табличным данным построить для функции $f(x)$ интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа и привести его к стандартному виду целого многочлена;

2) используя полученный полином, вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке $\bar{x} = N + 0{,}3$.

<u>Указание</u> Все вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой. Округлить полученное значение $f(\bar{x})$ до 3-х десятичных знаков после запятой

ЗАДАНИЯ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ № 2.

РГР № 2 состоит из трех задач. Задание для каждой задачи включает в себя ее формулировку и десять вариантов исходных данных.

Задача 5. Дан определенный интеграл $\int_1^2 \frac{e^{Nx/3}}{Nx}dx$, где N – номер варианта. Требуется: составить таблицу значений подынтегральной функции в точках $x_i = 1 + ih$, где $i = 0, 1, \ldots, 10$ с шагом $h = 0{,}1$ и вычислить приближенное значение интеграла, используя эту таблицу и формулу Симпсона.

Указание. Все вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой, полученный результат округлить до 3-х десятичных знаков после запятой.

Задача 6. Дана задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения: $y' = Nx - y^2$, $y(0) = N/10$ (N – номер варианта). Решить задачу при помощи метода Рунге-Кутты на промежутке [0; 0,5] с шагом $h = 0{,}1$.

Указание. Все вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой.

Задача 7. Температура однородного стержня $U = U(x, t)$ в сечении x в момент времени t удовлетворяет уравнению теплопроводности. Используя метод сеток, найти решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ в области $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1{,}5, \\ 0 \le t \le 0{,}09 \end{cases}$ при заданных условиях: начальное распределение температуры в стержне $U(x, 0) = f(x)$, температура на концах стержня $U(0; t) = \alpha(t)$, $U(1{,}5; t) = \beta(t)$, где $f(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – заданные функции.

Указания. Для решения использовать сетку с шагом $h = 0{,}3$ по переменной x и с шагом $d = 0{,}015$ по переменной t. Все значения функции в узлах сетки вычислять с округлением до 4-го знака после запятой.

Номер варианта	Функция $f(x)$	Функция $\alpha(t)$	Функция $\beta(t)$
1	$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{9}\right)$	$\alpha(t) = 1 - t^2$	$\beta(t) = 0{,}5$
2	$f(x) = \sin x$	$\alpha(t) = 2t$	$\beta(t) = \cos\left(\frac{\pi - 3}{2}\right)$

3	$f(x) = \ln(x + 1)$	$\alpha(t) = t^2$	$\beta(t) = \ln(2{,}5)$
4	$f(x) = \dfrac{5}{2x+5}$	$\alpha(t) = \cos t$	$\beta(t) = 0{,}625$
5	$f(x) = x^2 + 2x$	$\alpha(t) = \sin t$	$\beta(t) = 5{,}25$
6	$f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$	$\alpha(t) = t^2 + t$	$\beta(t) = 1$
7	$f(x) = \sqrt{2x+1}$	$\alpha(t) = t^2 + 1$	$\beta(t) = 2$
8	$f(x) = \ln(4 - 2x)$	$\alpha(t) = \ln(t + 4)$	$\beta(t) = 0$
9	$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	$\alpha(t) = 3t$	$\beta(t) = 0{,}6$
10	$f(x) = \sqrt{4+x^2}$	$\alpha(t) = 2\cos t$	$\beta(t) = 2{,}5$

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА И ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

№ задачи	Содержание (темы)	Литература
1	Погрешности вычислений. Предельная абсолютная погрешность и предельная относительная погрешности вычислений. Вычисление приближенных значений функции	[1], гл. 1, §1; [2], гл. 1.1; [4], гл. I, работа №1(1), 2(2); [5], §1, 2.1, 2.2.1
2	Методы решения нелинейных уравнений. Метод деления отрезка пополам	[1], гл. 4, §26; [2], гл.5.1, 5.2; [3], гл.IX, № 1168, 1169, 1170, 1178, 1179; [4], гл. IV, работа №1(15); [5], §2
3	Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Вычисление определителя с использованием метода Гаусса	[1], гл.3, §19; [2], гл. 2.1, 2.2; [4], гл. III, работа №2(7), 3(8); [5], §4.1.1, 6.1,
4	Полиномиальная интерполяция функций. Интерполяционный полином в	[1], гл. 1, §4, 5; [2], гл. 8.1, 8.2;

	форме Лагранжа и его использование	[3], гл.IX, № 1192-1196; [4], гл. VI, работа №1(32)
5	Квадратурные формулы численного интегрирования. Формула Симпсона	[1], гл. 2, §15; [2], гл. 12.1, 12.3; [3], гл.IX, № 1205-1207; [4], гл. VII, работа №2(39)
6	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге - Кутты	[1], гл. 2, §18; [2], гл. 14.1, 14.5, 14.6; [3], гл.IX, № 1234-1237; [4], гл. VIII, работа №2(43)
7	Понятие о методе сеток. Использование метода сеток для решения уравнений математической физики	[1], гл. 6, §31; [2], гл. 17.3, 19.1, 19.2, 20.1, 20.2; [4], гл. IX, работа №2(48)

Примечание. Ссылки на литературу в таблице даны в соответствии с номерами в списке рекомендуемой литературы.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Погрешности вычислений

1.1. ***Абсолютная и относительная погрешности***

Практические вычисления проводятся над числами, которые могут быть заданы не только точно, но и приближенно. Например, число 1/3 можно записать в виде десятичной дроби только приближенно.

Правило округления чисел: если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти, то все сохраняемые цифры не изменяются, а если первая отбрасываемая цифра больше или равна пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Примеры. $13523 \approx 13500 = 135 \cdot 10^2$, $2{,}1564 \approx 2{,}16$, $-0{,}325 \approx -0{,}33$.

Обозначим a^* – точное значение некоторой величины, a – приближенное значение этой величины (приближенное число).

Величину $|a - a^*|$ называют *абсолютной погрешностью числа* a.

В большинстве случаев a^* неизвестно, однако, можно указать некоторое число $\Delta(a)$, оценивающее абсолютную погрешность приближенного числа, т.е. удовлетворяющее условию $|a - a^*| \le \Delta(a)$. Число $\Delta(a)$ называют *предельной абсолютной погрешностью* числа a. Обычно предельную абсолютную погрешность называют просто абсолютной погрешностью и записывают так: $a^* = a \pm \Delta(a)$, причем в числах a и $\Delta(a)$ сохраняют одинаковое число знаков после запятой. При округлении предельной абсолютной погрешности его значение всегда берется «с избытком», т.е. последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Примеры. $\pi^* = 3{,}1416 \pm 0{,}0001$; $\frac{2}{3} = 0{,}67 \pm 0{,}01$.

Предельной относительной погрешностью числа a называют величину $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a^*|}$ или $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a^*|} \cdot 100\%$. В случае, когда a^* неизвестно, полагают, что $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$ или $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\%$. Обычно предельную относительную погрешность числа называют просто *относительной погрешностью*.

Примеры. $\pi^* = 3{,}1416 \pm 0{,}0001 \;\Rightarrow\; \delta(\pi) = \frac{\Delta(\pi)}{|\pi|} \approx \frac{0{,}0001}{3{,}1416} \approx 0{,}00003$;

$$\frac{2}{3} = a^* = 0{,}67 \pm 0{,}01 \;\Rightarrow\; \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{\left|\frac{2}{3}\right|} \cdot 100\% \approx \frac{0{,}01}{0{,}67} \cdot 100\% \approx 1{,}5\%.$$

Первая слева цифра числа, отличная от нуля, и все цифры, расположенные правее нее, называются *значащими цифрами числа*. В записи погрешностей обычно оставляют одну значащую цифру, например, $\Delta(a) = 4 \cdot 10^5$, $\Delta(b) = 0{,}05$, или $\delta(x) = 3\%$.

Если приближенное число записано без указания его погрешности, то по умолчанию считается, что его абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего сохраненного разряда в записи числа, например, запись $a \approx 2{,}320$ означает, что $\Delta(a) = 0{,}001$.

1.2. ***Вычисления с учетом погрешностей***

При выполнении действий над приближенными числами происходит накопление погрешностей, и полученный результат не может быть точнее исходных данных.

Основные формулы для вычисления погрешностей арифметических операций:

$\Delta(c^*\cdot a) = c^*\cdot\Delta(a)$, если c^* – точное число (константа);

$$\Delta(a \pm b) = \Delta(a) + \Delta(b)\,; \tag{1}$$

$$\Delta(ab) = |a|\cdot\Delta(b) + |b|\cdot\Delta(a)\,;$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{|a|\cdot\Delta(b) + |b|\cdot\Delta(a)}{b^2}\,; \tag{2}$$

$$\delta(a \pm b) = \frac{|a|\cdot\delta(b) + |b|\cdot\delta(a)}{|a \pm b|}\,;$$

$$\delta(ab) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)\,. \tag{3}$$

При выполнении арифметических операций обычно все промежуточные вычисления осуществляют с одной или двумя запасными десятичными цифрами по сравнению с желаемым результатом, а затем полученный результат округляют: либо до требуемой в задаче точности, либо в соответствии абсолютной погрешностью результата (например, если a = 12305362, $\Delta(a)$ = = $2\cdot10^5$, то $a \approx 123\cdot10^5$; если b = 1,2345, $\Delta(b)$ = 0,05, то $b \approx 1{,}23$).

Примеры.

1. Найти разность чисел: a^* = 1,24 ± 0,03 и b^* = 7,361 ± 0,007.

Решение. Погрешность: $\Delta(a – b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ = 0,037 ≈ 0,04 (формула (1)).

Результат вычитания: $a – b$ = (1,24 – 7,361) ± 0,04 ≈ – 6,12 ± 0,04.

2. Найти отношение чисел: x = 0,255 и y = 34,01, если известна погрешность $\delta(x)$ = 1%.

Решение. Приближенное число y записано без указания его погрешности, следовательно, $\Delta(y)$ = 0,01, откуда находим: $\delta(y) = \dfrac{\Delta(y)}{|y|} = \dfrac{0{,}01}{34{,}01} \approx 0{,}0003$.

$$z = \frac{x}{y} = \frac{0{,}255}{34{,}01} \approx 0{,}007498,$$

$$\delta(z) = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \{\text{формула (3)}\} = \delta(x) + \delta(y) = 0{,}01 + 0{,}0003 = 0{,}0103 \approx 0{,}01,$$

$$\Delta(z) = z \cdot \delta(z) \approx 0{,}007498 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}00008.$$

Результат деления: $z = \dfrac{x}{y} = 0{,}00750 \pm 0{,}00008$.

Если значение аргумента функции $y = f(x)$ – приближенное число x, то *абсолютную погрешность значения функции* оценивают по следующей формуле:

$\Delta(y) \le \max\limits_{x} \left| f'(x) \right| \cdot \Delta(x)$, где максимум модуля производной вычисляется как его наибольшее значение на промежутке $x \in [x - \Delta(x); x + \Delta(x)]$.

Абсолютную погрешность значения функции 2-*х аргументов* $z = f(x, y)$ можно оценить по формуле:

$$\Delta(z) \le \max_{D} \left| f'_x(x, y) \right| \cdot \Delta(x) + \max_{D} \left| f'_y(x, y) \right| \cdot \Delta(y), \qquad (4)$$

где максимум модулей частных производных находят среди всех их значений в области

$$D: \begin{cases} x - \Delta(x) \le x^* \le x + \Delta(x), \\ y - \Delta(y) \le y^* \le y + \Delta(y). \end{cases}$$

Аналогично определяется абсолютная погрешность значения функции трёх и более переменных.

2. Решение нелинейных уравнений

2.1. *Изоляция корней*

Пусть требуется найти корни (решения) уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (5),$$

где $f(x)$ – нелинейная функция.

В общем случае можно говорить лишь о приближенном вычислении корней уравнения (5), т.е. о получении такого значения аргумента, при котором $f(x) \approx 0$. Принято считать, что точное решение x^* этого уравнения *полу-*

чено с точностью ε, если для полученного приближенного решения x выполнено условие $|x - x^*| < \varepsilon$.

Если непрерывная функция $f(x)$ является знакопеременной в области определения, то уравнение (5) имеет конечное или бесконечное количество корней. Каждый из корней получают, используя численные методы, после процедуры отделения корней.

О*тделить корень* уравнения (5) – значит найти такой интервал (a, b), в котором содержится корень уравнения, причем только один.

Известно, что если на концах некоторого промежутка $[a, b]$ непрерывная функция $f(x)$ имеет разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, а внутри этого промежутка производная $f'(x)$ знак не меняет, то в интервале (a, b) существует корень уравнения (5), причем только один.

Процедура отделения корней может быть осуществлена графически (построением графика функции $f(x)$) или с помощью проверки знака функции на некотором множестве значений x, например, на множестве равноотстоящих точек на оси абсцисс.

2.2. ***Уточнение корней уравнения методом деления отрезка пополам***

Пусть требуется решить уравнение (5) с заданной точностью ε. Известен промежуток изоляции корня x^* – промежуток $[a, b]$, на концах которого непрерывная функция $f(x)$ имеет разные знаки, а внутри этого промежутка производная $f'(x)$ знак не меняет.

Процедура *уточнения корня* заключается в построении последовательности точек x_0, x_1, x_2, ….. x_k,…., такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$. Процесс вычисления заканчивается, когда получено x_k, удовлетворяющее условию

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon. \qquad (6)$$

Опишем метод уточнения корня, называемый *методом деления отрезка пополам, или методом дихотомии*, или *методом бисекции*. Иногда этот метод называют еще *методом проб*.

Уточнение корня методом деления отрезка пополам осуществляется в следующем порядке:

1) вводим обозначении: $a_0 = a$, $b_0 = b$;

2) вычисляем $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$;

3) из двух интервалов (a_0, x_0) и (x_0, b_0) выбираем тот, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, и обозначаем концы этого интервала a_1, b_1;

4) вычисляем $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$;

5) из двух интервалов (a_1, x_1) и (x_1, b_1) выбираем тот, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, и обозначаем концы этого интервала a_2, b_2;

6) вычисляем $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$,

и так далее, пока не будет выполнено условие $|b_k - a_k| \le 2\varepsilon$, – тогда приближенное значение корня $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ будет удовлетворять условию (6), т.е. решением уравнения будет число $x^* = x_k \pm \varepsilon$.

Последовательность $\{x_k\}$, полученная методом деления отрезка пополам, сходится к точному решению x^*, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

<u>Описание алгоритма метода.</u>

1. Для $k = 0$ выполняем:

$$a_0 = a;\ b_0 = b;\ x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}. \tag{7}$$

2. Увеличиваем номер шага $k := k + 1$, выполняем вычисления:

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(a_{k-1}) < 0, \\ x_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(a_{k-1}) > 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

$$b_k = \begin{cases} b_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0, \\ x_{k-1}, \text{ если } f(x_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) > 0, \end{cases} \tag{8.2}$$

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}. \tag{8.3}$$

3. Проверяем условие

$$|b_k - a_k| \le 2\varepsilon. \tag{9}$$

Если условие не выполняется, переходим к пункту 2, если условие выполняется, то процесс закончен. Получаем ответ: $x^* \approx \dfrac{b_k + a_k}{2}$.

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

3.1. *Системы линейных алгебраических уравнений*

Пусть требуется найти решение системы из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система может быть записана в матричном виде

А$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$, где

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных,

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов,

$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы.

Если в системе $m = n$, то матрица A – квадратная.

Методы решения систем линейных уравнений можно разбить на две группы: *точные* (прямые или конечные) и *приближенные* (итерационные или методы последовательного приближения).

К *точным* методам относятся такие, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), за конечное, заранее оцениваемое количество шагов вычислений приводят к точным значениям неизвестных x_i. Фактически, из-за почти неизбежных округлений при вычислениях, результаты, получаемые точными методами, будут содержать погрешности. Точными являются, например, метод вычисления по формулам: Крамера и метод Гаусса (рассмотрены в курсе Математика).

К *приближенным* относятся такие методы, которые даже в предположении отсутствия погрешности округлений доставляют решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как результат бесконечного процесса. На практике при использовании итерационных методов ограничиваются вычислением конечного числа приближений в зависимости от допустимого уровня погрешности. Примерами приближенных методов являются метод простой итерации и его модификация — метод Зейделя.

В прикладных задачах довольно часто используются линейные системы, при решении которых можно не заботиться о «вредном» воздействии неустранимых погрешностей на решение, спокойно применяя простейшую схему гауссова исключения. Это системы, для матриц которых выполнено *условие диагонального преобладания*:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ для всех } i = 1,2,3,\ldots,n.$$

3.2. *Решение систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей*

Необходимость решать подобные системы возникает при реализации различных методов решения дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = f_2, \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = f_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = f_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = f_n. \end{cases}$$ – система с трехдиагональной матрицей.

Для решения таких систем применяют ***метод прогонки***.

Алгоритм метода прогонки для систем с трехдиагональными матрицами можно представить в виде реализации двух этапов:

1) *Прямая прогонка*:

Вычисляются прогоночные коэффициенты p_i и q_i по формулам:

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1},\ p_i = \frac{c_i}{b_i - p_{i-1}a_i},\ i = 2,3,\ldots,n-1, \tag{10.1}$$

$$q_1 = \frac{f_1}{b_1},\ q_i = \frac{f_i - q_{i-1}a_i}{b_i - p_{i-1}a_i},\ i = 2,3,\ldots,n. \tag{10.2}$$

Замечание. Ввиду опасности обращения знаменателя в ноль в этих формулах следует помнить об ***условиях применимости метода прогонки*** – условиях диагонального преобладания в исходной матрице: $|b_i| > |a_i| + |c_i|$ для всех i.

2) *Обратная прогонка*:

Вычисляется искомое решение по формулам:

$$x_n = q_n,\ x_i = q_i - p_i x_{i+1},\ i = n-1, n-2, \ldots, 1 \tag{11}$$

3.3. ***Метод простой итерации***

Пусть требуется решить систему, заданную матричным уравнением $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ с квадратной матрицей A.

Будем считать, что решение системы существует и единственно.

Приведем уравнение

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

к виду, удобному для итерирования

$$\boldsymbol{x} = Cx + f\text{, где} \tag{12}$$

$\underset{n\times n}{C}$ – некоторая матрица; f – вектор-столбец свободных членов.

Удобство состоит в том, что, задав начальное приближение

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

и, подставив его в правую часть уравнения (4), слева получим следующее приближение:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = Cx^{(0)} + f$$

и, аналогично, каждое последующее приближение

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f\,,\; k = 0,1,2,\ldots$$

В качестве ***условия сходимости*** процесса к решению системы можно принять условие:

Максимум построчной суммы модулей элементов матрицы C меньше единицы:

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| c_{ij} \right| = q < 1.$$

Условия сходимости выполняются, если в матрице A диагональные элементы преобладают, т. е. $\left| a_{ii} \right| \ge \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij} \right|,\; i = \overline{1,n}$, и хотя бы для одного i неравенство строгое. Другими словами, модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

Критерий остановки итерационного процесса – выполнение условия:

$$\frac{q}{1-q} \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \text{ – заданная точность.} \tag{13}$$

Для проверки выполнимости критерия остановки процесса следует проверить выполнение условия *для каждой компоненты* вектора $(k+1)$-го приближения, используя два приближения (последнее и предпоследнее).

Тогда $x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$.

3.4. *Метод Зейделя*

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций. Он заключается в том, что при вычислении (k +1)-го приближения неизвестного $x_i^{(k+1)}$ (компонента вектора) при $i > 1$ используются уже вычисленные ранее (k +1)-е приближения неизвестных $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$.

Условие сходимости и ***критерий остановки*** итерационного процесса для метода простой итерации можно использовать и для метода Зейделя.

4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и его использование

В основе многих численных методов лежит замена одной функции $f(x)$, которая не может быть использована для решения некоторой задачи, другой функцией $\varphi(x)$, близкой к $f(x)$ в некотором смысле и обладающей свойствами, которые позволят производить над нею необходимые вычислительные операции. Такую замену принято называть *аппроксимацией* функции $f(x)$. Разные виды аппроксимации отличаются выбором аппроксимирующей функции $\varphi(x)$, критериями близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и др.

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана *сетка* – множество точек $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, называемых *узлами сетки*. И пусть функция $f(x)$ задана лишь в узловых точках, т.е. известны ее значения $y_i = f(x_i)$ для $i = 0, 1, 2,\ldots,n$. Такие данные удобно представить в виде таблицы:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_i)$	y_0	y_1	...	y_n

Кроме того, пусть задана некоторая точка $\bar{x} \in [a, b]$, не совпадающая ни с одной из узловых точек.

Задача интерполяции функции состоит в том, чтобы по имеющейся таблице значений $f(x)$ найти ее значение в точке $\bar{x} \in [a, b]$ с некоторой степенью точности.

Для решения этой задачи строится аппроксимирующая функция $\varphi(x)$, значения которой в узловых точках совпадают с заданными значениями функции: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 0, 1, 2,\ldots,n$. Геометрически это означает, что графики функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ пересекаются или касаются друг друга не менее, чем в $(n+1)$ заданных точках. Удобной для этой цели функцией $\varphi(x)$ является полином (многочлен) n-го порядка:

$$\varphi(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n.$$

Одной из форм представления интерполяционного полинома является *интерполяционный полином в форме Лагранжа*:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \cdot y_i \right).$$

Интерполяционный полином n-го порядка в форме Лагранжа состоит из $(n+1)$-го слагаемого, каждое из которых является многочленом n-го порядка.

Например, интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа состоит из 5 слагаемых и в развернутом виде выглядит так:

$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \cdot y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} y_2 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} y_3 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} y_4.$$

Если задать на промежутке $[a, b]$ *равномерную сетку* с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{4}$, т.е. точки $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ тогда формула полинома $L_4(x)$ будет иметь более простой вид:

$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)\,h^4} \cdot y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)\,h^4} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\,h^4} y_2 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\,h^4} y_3 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot h^4} y_4. \qquad (14)$$

Чтобы найти приближенное значение функции $f(x)$ в точке $\bar{x} \in [a, b]$, следует воспользоваться формулой $f(\bar{x}) \approx L_4(\bar{x})$. При этом можно не приводить полученный полином в форме Лагранжа к стандартному виду $P_n(x)$, если это не требуется для другой цели, а просто подставить значение $x = \bar{x}$ в формулу (14).

5. Численное интегрирование функции одной переменной

5.1. *Квадратурные формулы*

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

где $f(x)$ – интегрируемая на промежутке $[a, b]$ функция, заданная таблично в узлах сетки $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, т.е. известны ее значения $f(x_i)$ для $i = 0, 1, 2,\ldots,n$.

Для приближенного вычисления определенного интеграла I используют *квадратурные формулы* вида $I \approx \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$, где коэффициенты α_i выбирают тем или иным методом. Погрешность квадратурной формулы $R = \left| I - \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \right|$ зависит от выбора коэффициентов α_i, разбиения промежутка $[a, b]$ и погрешности вычислений, в которую входит и погрешность вычисления значений функции $f(x_i)$ в узлах сетки.

5.2. *Квадратурная формула Симпсона*

Предполагается, что промежуток $[a, b]$ разбит на четное число $n = 2m$ равных промежутков длины h. На каждом из промежутков $[x_i, x_{i+2}]$ для $i = 0, 2, 4,\ldots, (2m-2)$ функцию $f(x)$ заменим на интерполяционный полином 2-го порядка $g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$, которому графически соответствует парабола, проходящая через 3 точки: $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ и $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$. Интеграл от функции $g_i(x)$ по промежутку $[x_i, x_{i+2}]$ даст приближенное значение интеграла $\int\limits_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx$, а сумма этих интегралов по всем участкам даст приближенное значение интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Соответствующая квадратурная формула называется *квадратурной формулой парабол*, или *квадратурной формулой Симпсона* и имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ...2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})\text{, или}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + y_{2m}) = I_{прибл}. \qquad (15)$$

В этой формуле:

$h = \dfrac{b-a}{2m}$ – шаг сетки, т.е. длина промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ для $i = 0, 1, 2,\ldots, 2m-1$;

$y_i = f(x_i)$ – значения функции в узлах сетки (для $i = 0, 1, 2,\ldots, 2m$).

6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом Рунге-Кутты

Пусть требуется найти на промежутке $[a, b]$ решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0,$$

где x_0, y_0 – заданные числа.

Предполагается, что решение $y(x)$ задачи Коши существует и единственно.

Приближенное решение дифференциального уравнения 1-го порядка находят в узлах одномерной сетки $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, т.е. вычисляют значения $y_i \approx y(x_i)$ для $i = 0, 1,\ldots, n$. Для численного решения задачи Коши используют *разностные методы* и *методы Рунге – Кутты* (*Рунге-Кутта*).

Опишем так называемый *метод Рунге-Кутты* 4-*го порядка*, наиболее широко используемый на практике.

Зададим на промежутке $[a, b]$ равномерную сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$, тогда $x_i = x_0 + ih$ для $i = 0, 1,\ldots,n$. Значение $y(x_0) = y_0$ задано в начальном условии задачи. Каждое следующее значение $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ для $i = 0, 1,...,n-1$ находят по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (16)$$

где величины k_1, k_2, k_3, k_4 для каждого y_{i+1} вычисляют по формулам:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2}{2}\right), \\ k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3). \end{cases} \qquad (17)$$

Говорят, что некоторый численный метод решения задачи Коши имеет *порядок точности* $k > 0$, если существует такое число $q > 0$, при котором выполнено условие:

$$|y_i - y(x_i)| \le q\, h^k, \ \ i = 0, 1, ..., n,$$

где h – шаг сетки, $y(x_i)$ –значение точного решения уравнения в точке x_i, а y_i – приближенное значение решения в точке x_i, полученное данным методом.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка имеет четвертый порядок точности.

7. Решение дифференциальных уравнений с частными производными

7.1. *Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с частными производными*

Дифференциальным уравнением 2-*го порядка с частными производными* относительно неизвестной функции $U = U(x, y)$ называется уравнение вида:

$$F(x, y, U, U_x, U_{y,}, U_{xx}, U_{xy}, U_{yx}, U_{yy}) = 0,$$

где $U = U(x, y)$ – неизвестная функция от x, y,

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ U_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\ U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},\ U_{yx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Линейным дифференциальным уравнением 2-*го порядка с частными производными* называется уравнение вида:

$$a \cdot U_{xx} + bU_{xy} + cU_{yx} + dU_{yy} + eU_x + gU_y + hU = f,$$

где a, b, c, d, e, g, h, f – известные непрерывные функции от x, y (в частности, они могут быть постоянными).

Иногда рассматривается функция $U = U(x, t)$, где t – время.

Дифференциальные уравнения с частными производными, описывающие некоторый физический процесс, называют *уравнениями математической физики*. Для физических приложений наиболее важными являются три типа таких уравнений:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$ – *волновое уравнение*;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$ – *уравнение Лапласа*;

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$ – *уравнение теплопроводности.*

Например, рассматривается задача о распределении температуры в однородном стержне, теплоизолированном от внешней среды по боковой поверхности и имеющем длину L.

Обозначив через x – абсциссу сечения стержня ($x \in [0;\ L]$), t – время, $U = U\,(x,\ t)$ – температуру в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t, получим *модель этой задачи* – уравнение теплопроводности. Коэффициент a в этом уравнении зависит от физических свойств материала, из которого изготовлен стержень.

Для описания реального физического процесса кроме дифференциальных уравнений необходимо задать еще начальное состояние процесса – *начальные условия*, а также значения неизвестной функции или ее производных на границе рассматриваемой области – *граничные* (*краевые*) *условия*.

Начальные условия задают, как правило, при $t = 0$.

Краевые условия задают на границе области, например, для уравнения теплопроводности задают значения функции $U\,(x,\ t)$ при $x = 0$; $x = L$ в любой момент времени $t \in [0;\ T]$.

Если заданы и начальные, и краевые условия, то говорят о *смешанной задаче* для дифференциального уравнения с частными производными.

7.2. *Решение уравнения теплопроводности методом сеток*

Пусть требуется решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности, т.е. найти функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению с частными производными

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{18}$$

где $U = U(x, t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t, если известны:

температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени $t = 0$:

$$U(x, 0) = f(x) \text{ для } 0 \le x \le L, \tag{19}$$

и температура на концах стержня в любой момент времени t:

$$U(0, t) = \alpha(t),\ U(L, t) = \beta(t) \text{ для } 0 \le t \le T, \tag{20}$$

где $f(x), \alpha(t), \beta(t)$ – известные непрерывные функции.

Будем предполагать, что смешанная задача (18)-(20) имеет единственное решение $U = U(x, t)$ в области $D: \begin{cases} 0 \le x \le L, \\ 0 \le t \le T. \end{cases}$

Используем *конечно-разностный метод* приближенного решения задачи, называемый также *методом сеток*.

Введем прямоугольную сетку, построенную на области D:

$$x_i = ih \text{ для } i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$
$$t_k = kd \text{ для } k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

где $h = \frac{L}{n}$ – шаг сетки по x, $d = \frac{T}{m}$ – шаг сетки по t. При этом прямоугольная область D будет разбита на прямоугольные части прямыми $x = x_i$ и $t = t_k$ в системе координат Oxt. Точки (x_i, t_k), лежащие на пересечении этих прямых, называют *узлами двумерной сетки*, или просто *узлами*.

Вместо неизвестной функции $U(x, t)$ будем рассматривать функцию, заданную в узлах сетки: $u_{i,k} = u(i, k)$, которую называют *сеточной функцией*. Будем искать значения сеточной функции, соответствующие приближенному решению задачи, т.е. $u_{i,k} \approx U(x_i, t_k)$.

Неизвестные $u_{0,k}$ и $u_{n,k}$ для $k = 0, 1, \ldots, m$ находят из граничных условий (20):

$$u_{0,k} = U(0, t_k) = \alpha(t_k),\ u_{n,k} = U(L, t_k) = \beta(t_k).$$

Значения $u_{i,0}$, соответствующие моменту времени $t_0 = 0$, находят из начальных условий (19):

$$u_{i,0} = U(x_i, 0) = f(x_i), \text{ для } i = 1,\ldots,n-1.$$

Для определения значений $u_{i,k}$ во внутренних узлах заменим частные производные отношениями конечных разностей по приближенным формулам:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{d}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2},$$

тогда уравнению (18) будет соответствовать *сеточное уравнение*:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{d} = a^2 \cdot \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2}.$$

Если выбрать $d = \tau \dfrac{h^2}{a^2}$, то получим простую формулу для вычисления значений сеточной функции: $u_{i,k+1} = u_{i,k}(1 - 2\tau) + \tau(u_{i-1,k} + u_{i+1,k})$.

Можно доказать, что для значений $0 \le \tau \le 0{,}5$ получается *устойчивое решение* смешанной задачи, т.е. малым изменениям исходных данных задачи будут соответствовать лишь малые изменения полученного решения.

Если выбрать шаги сетки h и d таким образом, чтобы было выполнено условие $\tau = \dfrac{da^2}{h^2} = \dfrac{1}{6}$, то получается наиболее точная формула для расчетов:

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,k} + 4u_{i,k} + u_{i+1,k}),$$

для $i = 1, 2,\ldots,n-1$, $k = 0, 1,\ldots,m-1$.

Значения $u_{i,k}$ для $i = 1, 2,\ldots,n-1$ находят «по слоям»: сначала вычисляют $u_{i\,0}$ на «нулевом слое», затем вычисляют $u_{i,1}$, $u_{i,2}$,… – значения на каждом следующем, «(k +1)-м слое», соответствующем моменту времени t_{k+1}, используя значения на предыдущем, «k-м слое».

Окончательно получаем *разностную модель задачи* – расчетные формулы для вычисления всех значений функции $U(x_i, t_k) = u_{i,k}$ в узлах сетки, покрывающей область D:

$$u_{0,k} = \alpha(t_k), \quad 0 \le k \le m, \tag{21}$$

$$u_{n,k} = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le m, \tag{22}$$

$$u_{i,0} = f(x_i), \quad 1 \le i \le n-1, \tag{23}$$

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,k} + 4u_{i,k} + u_{i+1,k}), \ 1 \le i \le n-1, \ 0 \le k \le m-1. \tag{24}$$

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА РГР № 1

Задача 1. Даны приближенные значения величин $x = 1{,}6$, $y = 0{,}35$, где $\Delta(x) = 0{,}02$, $\delta(y) = 4\%$. Требуется:

1) вычислить значение величины $s = \dfrac{y}{3y - x}$, оценить предельную абсолютную погрешность $\Delta(s)$ и округлить значение s в соответствии с погрешностью;

2) вычислить приближенное значение функции $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot (2x - 3y)$, оценить предельную абсолютную погрешность значения функции и округлить его в соответствии с погрешностью.

Решение.

1). Вычислим приближенное значение s: $s = \dfrac{y}{3y - x} = \dfrac{0{,}35}{1{,}05 - 1{,}6} \approx -0{,}6364$.

Оценим предельную абсолютную погрешность результата по формуле (2), в которой

$$\Delta(x) = 0{,}02; \ \Delta(y) = y \cdot \delta(y) = 0{,}35 \cdot 0{,}04 = 0{,}014,$$

следовательно, по формуле (1) получаем:

$$\Delta(3y - x) = 3\Delta(y) + \Delta(x) = 0{,}062.$$

Предельная абсолютная погрешность значения s:

$$\Delta(s) = \Delta\left(\frac{y}{3y - x}\right) = \frac{|y| \cdot \Delta(3y - x) + |3y - x| \cdot \Delta(y)}{(3y - x)^2} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}062 + 0{,}55 \cdot 0{,}014}{(-0{,}55)^2} \approx 0{,}1.$$

Округлим значение s, оставляя столько же цифр после запятой, сколько их в записи абсолютной погрешности результата: $\Delta(s) = 0{,}1$, следовательно, значение s округляем до одного знака после запятой: $s \approx -0{,}6$.

2). Вычислим приближенное значение функции $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot (2x - 3y)$:

$$f(1{,}6;\ 0{,}35) = \sqrt{1{,}6}\cdot(3{,}2 - 1{,}05) \approx 1{,}2649\cdot 2{,}15 \approx 2{,}7196.$$

Оценим предельную абсолютную погрешность результата по формуле (4), в которой:

$$f'_x = \frac{2x-3y}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot 2 = 3\sqrt{x} - \frac{3y}{2\sqrt{x}}; \quad f'_y = -3\sqrt{x};$$

$$D: \begin{cases} 1{,}6 - 0{,}02 \le x^* \le 1{,}6 + 0{,}02, \\ 0{,}35 - 0{,}014 \le y^* \le 0{,}35 + 0{,}014. \end{cases}$$

Максимальные значения модулей частных производных:

$$\max_D |f'_x(x,y)| = \max_D(3\sqrt{x}) - \min_D(3y)/\max_D(2\sqrt{x}) =$$

$$= 3\sqrt{1{,}62} - 3\cdot 0{,}336/(2\sqrt{1{,}62}) \approx 3{,}4224;$$

$$\max_D |f'_y(x,y)| = \max_D |-3\sqrt{x}| = 3\sqrt{1{,}62} \approx 3{,}8184.$$

Предельная абсолютная погрешность значения функции:

$$\Delta(f) \le \max_D |f'_x(x,y)|\cdot\Delta(x) + \max_D |f'_y(x,y)|\cdot\Delta(y) \approx$$

$$\approx 3{,}4224\cdot 0{,}02 + 3{,}8184\cdot 0{,}014 \approx 0{,}122 \approx 0{,}2$$

(округление абсолютной погрешности производится «с избытком»).

Округлим значение функции, оставляя столько же цифр после запятой, сколько их в записи абсолютной погрешности результата: $\Delta(f) = 0{,}2$, тогда $f(1{,}6;\ 0{,}35) \approx 2{,}7$.

Ответы: 1) $s \approx -0{,}6$; $\Delta(s) = 0{,}1$;

2) $f(1{,}6;\ 0{,}35) \approx 2{,}7$; $\Delta(f) = 0{,}2$.

Задача 2. Дано уравнение: $x^5 + 3x - 2{,}5 = 0$. Требуется:

1) определить число корней уравнения и найти промежутки их изоляции;
2) вычислить значение одного из корней уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ при помощи метода деления отрезка пополам.

Решение.

1). Будем искать такой интервал (a, b), в котором содержится корень уравнения $x^5 + 3x - 2{,}5 = 0$, причем только один. Для этого найдем производную $f'(x) = 5x^4 + 3$. Из того, что $f'(x) > 0$ для любых значений x, следует, что функция $f(x) = x^5 + 3x - 2,5$ монотонно возрастающая, значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет только один корень (точку пересечения графика $y = f(x)$ с осью абсцисс).

Подбором находим две точки, в которых функция имеет разные знаки: например, точки $a = 0,5$, $b = 1$ (чем ближе друг к другу эти точки, тем меньше потребуется сделать вычислений на этапе уточнения корня). Проверка: $f(0,5) = (0,5)^5 + 3 \cdot 0,5 - 2,5 \approx -0,9 < 0,\quad f(1) = 1^5 + 3 - 2,5 = 1,5 > 0$, следовательно, $f(a) \cdot f(b) < 0$ и корень уравнения $x^* \in [0,5;\ 1]$.

2). Уточним корень уравнения $x^5 + 3x - 2,5 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$ методом деления отрезка пополам.

Для этого обозначим: номер шага $k = 0$; $a_0 = a = 0,5$; $b_0 = b = 1$, и вычислим начальное значение корня $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 0,75$ и значение функции $f(x_0) = x_0^5 + 3x_0 - 2,5 \approx -0,0127$ (все промежуточные вычисления будем производить, используя 4 десятичных знака после запятой).

Для $k = 1$ находим a_k, b_k. По формулам (8.1) –(8.2). Поскольку $f(x_0) < 0$, то выполнены условия $f(x_0) \cdot f(a_0) > 0$, $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0$, поэтому $a_1 := x_0$ и $b_1 := b_0$, т.е. $[a_1; b_1] = [0,75;\ 1]$. После этого вычислим $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 0,875$, значение функции $f(x_1) \approx 0,6379$ и проверим выполнение условия (9): $|b_1 - a_1| \le 2\varepsilon$. Получаем: $|b_1 - a_1| = 0,25 > 2\varepsilon = 0,02$. Условие не выполнено, следовательно, переходим к следующему шагу.

Для $k = 2, 3, \ldots$. находим a_k, b_k, x_k по формулам (8.1) – (8.3), проверяя на каждом шагу выполнение условия (9): $|b_k - a_k| \le 2\varepsilon$ и, если оно выполнено, определяем знак $f(x_k)$. Если $f(x_k) < 0$, то на следующем шаге изменяем a_k, а если $f(x_k) > 0$, то изменяем b_k, чтобы на каждом шаге выполнялось условие $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$. Результаты расчетов заносим в таблицу:

k	a_k	b_k	$x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$	$\lvert b_k - a_k \rvert$	$f(x_k) = x_k^5 + 3x_k - 2,5$
0	0,5	1	0,75	0,5	– 0,0127 < 0

1	0,75	1	0,875	0,25	0,6379 > 0
2	0,75	0,875	0,8125	0,125	0,2916 > 0
3	0,75	0,8125	0,7813	0,0625	0,1348 > 0
4	0,75	0,7813	0,7656	0,0313	0,0600 > 0
5	0,75	0,7656	0,7578	0,0156	

Процесс вычислений закончен, т.к. $|b_5 - a_5| = 0{,}0156 < 2\varepsilon = 0{,}02$. Последнее значение x_5 округляем в соответствии с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}01$: $x^* \approx x_5 \approx 0{,}76$.

Ответ: $x^* = 0{,}76 \pm 0{,}01$.

1. **Задача 3.** Решить трёхдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки и проверить ответ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 25 \\ 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 45 \\ 4x_4 + 5x_5 = 41 \end{cases}.$$

Решение:

Решение удобнее оформить в таблице:

i	a	b	c	f	p_i	q_i	x_i
1	0	1	1	3	1	3	1
2	1	2	2	11	2	8	2
3	2	3	3	25	-3	-9	3
4	3	4	4	45	4/13	5 7/13	4
5	4	5	0	41	0	5	5

Столбцы заполняются по формулам

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1},\ p_i = \frac{c_i}{b_i - p_{i-1}a_i},\ i = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$q_1 = \frac{f_1}{b_1},\ q_i = \frac{f_i - q_{i-1}a_i}{b_i - p_{i-1}a_i},\ i = 2,3,\ldots,n$$

В последнем столбце находится решение системы, которое находится по формулам

$$x_n = q_n,\ x_i = q_i - p_i x_{i+1},\ i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Ответ: решение системы: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$.

<u>Задача 4.</u> Дана таблица значений функции $f(x)$:

x_i	– 0,5	– 0,2	0,1	0,4	0,7
$f(x_i)$	3,2216	5,3468	4,9472	1,5327	2,5003

Требуется:

1) по табличным данным построить для функции $f(x)$ интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа и привести его к стандартному виду целого многочлена;

2) используя полученный полином, вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке $\bar{x} = 0{,}2$.

<u>Решение.</u>

1). Все значения x_i в данной таблице образуют равномерную сетку: $x_i = x_0 + ih$, где $x_0 = -0{,}5$, $h = 0{,}3$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Построим интерполяционный полином Лагранжа 4-го порядка по формуле (14), подставляя в нее значения x_i и $y_i = f(x_i)$:

$$L_4(x) = \frac{(x+0{,}2)(x-0{,}1)(x-0{,}4)(x-0{,}7)}{(-1)(-2)(-3)(-4)\,0{,}3^4} \cdot 3{,}2216 +$$

$$+ \frac{(x+0{,}5)(x-0{,}1)(x-0{,}4)(x-0{,}7)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)\,0{,}3^4} \cdot 5{,}3468 + \frac{(x+0{,}5)(x+0{,}2)(x-0{,}4)(x-0{,}7)}{2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\,0{,}3^4} \cdot 4{,}9472 +$$

$$+ \frac{(x+0{,}5)(x+0{,}2)(x-0{,}1)(x-0{,}7)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\,0{,}3^4} \cdot 1{,}5327 + \frac{(x+0{,}5)(x+0{,}2)(x-0{,}1)(x-0{,}4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0{,}3^4} \cdot 2{,}5003.$$

Приведем полученный полином к стандартному виду, произведя упрощения:

$L_4(x) \approx 16{,}572(x^4 - x^3 + 0{,}15x^2 + 0{,}05x - 0{,}0056) - 110{,}016\,(x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}21x^2 +$
$+ 0{,}167x - 0{,}014) + 152{,}691(x^4 - 0{,}4x^3 - 0{,}39x^2 + 0{,}086x + 0{,}028) - 31{,}537(x^4 -$

$- 0{,}1x^3 - 0{,}39x^2 - 0{,}031x + 0{,}007) + 12{,}8616\,(x^4 + 0{,}2x^3 - 0{,}21x^2 - 0{,}022x +$

$- \quad + 0{,}004) = 40{,}5716x^4 + 5{,}0888x^3 - 24{,}3618x^2 - 3{,}7180x + 5{,}5535$

(промежуточные вычисления производим, используя 4 десятичных знака после запятой).

2). Вычислим значение $f(\bar{x})$ с округлением до 3-го знака после запятой:

$$f(\bar{x}) = f(0{,}2) \approx L_4(0{,}2) \approx$$

$$\approx 40{,}5716 \cdot 0{,}2^4 + 5{,}0888 \cdot 0{,}2^3 - 24{,}3618 \cdot 0{,}2^2 - 3{,}7180 \cdot 0{,}2 + 5{,}5535 \approx 3{,}941.$$

Ответы:

1) интерполяционный полином в стандартном виде:

$$L_4(x) \approx 40{,}5716x^4 + 5{,}0888x^3 - 24{,}3618x^2 - 3{,}7180x + 5{,}5535;$$

1) значение $f(\bar{x}) = f(0{,}2) \approx 3{,}941$.

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА РГР № 2

Задача 5. Дан определенный интеграл $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{10x}dx$. Составить таблицу значений подынтегральной функции в точках $x_i = 1 + ih$, где $i = 0, 1, \ldots, 10$ с шагом $h = 0{,}1$ и вычислить приближенное значение интеграла, используя эту таблицу и квадратурную формулу Симпсона.

Решение.

i	$x_i = 1 + 0{,}1i$	$f(x_i) = e^{3x_i} / (10\,x_i)$
0	1	2,0086
1	1,1	2,4648
2	1,2	3,0499
3	1,3	3,8002
4	1,4	4,7633
5	1,5	6,0011
6	1,6	7,5944
7	1,7	9,6484
8	1,8	12,3004
9	1,9	15,7299
10	2	20,1714

Для построения таблицы (приведенной выше) значений подынтегральной функции $y = \dfrac{e^{3x}}{10x}$ вычисляем значения $x_i = 1 + ih$, где $i = 0, 1, \ldots, 10$, $h = 0{,}1$, затем значения функции в этих точках $f(x_i) = e^{3x_i} / (10\,x_i)$ и заносим их в таблицу. Для удобства дальнейших вычислений значения функции во внутренних точках x_i с нечетными номерами i смещаем влево, а с четными номерами – вправо.

Вычислим определенный интеграл, используя формулу Симпсона. Для этого подставим в формулу (15) $2m = 10$, $h = 0{,}1$, $y_i = f(x_i)$ и получим:

$$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{10\,x} \approx \frac{0{,}1}{3}(y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) \approx$$

$$\approx 0{,}0333\cdot(2{,}0086 + 20{,}1714 + 4\,(2{,}4648 + 3{,}8002 + 6{,}0011 + 9{,}6484 + 15{,}7299) +$$
$$+ 2\cdot(3{,}0499 + 4{,}7633 + 7{,}5944 + 12{,}3004)) \approx 7{,}606.$$

Ответ: $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{3x}}{10\,x}\,dx \approx 7{,}606.$

<u>Задача 6</u>. Дана задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения: $y' = 3x - 2y^2$, $y(0) = 0{,}4$. Решить задачу при помощи метода Рунге-Кутты на промежутке $[0; 0{,}5]$ с шагом $h = 0{,}1$.

<u>Решение.</u> Для решения задачи потребуется сделать 5 шагов, т.к.

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{0{,}5-0}{0{,}1} = 5.$$

Результаты промежуточных расчетов по формулам (16) – (17) для $i = 0, 1,..,4$ будем вносить в рабочую таблицу. Описание расчетов 0-го шага приведем подробно.

Номер шага $i = 0$, $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = 0{,}4$.

Вычислим величины k_1, k_2, k_3, k_4:

$$k_1 = h\cdot f(x_0, y_0) = 3x_0 - 2(y_0)^2 = -0{,}032;$$

$$k_2 = h\cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}1\left(3(x_0 + 0{,}05) - 2(y_0 - 0{,}016)^2\right) \approx -0{,}0145;$$

$$k_3 = h\cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}1\left(3(x_0 + 0{,}05) - 2(y_0 - 0{,}00725)^2\right) \approx -0{,}0159;$$

$$k_4 = h\cdot f\left(x_0+h, y_0+k_3\right) = 0{,}1\left(3(x_0+0{,}1)-2(y_0-0{,}01585)^2\right) \approx 0{,}0005;$$

следующее значение y_1 находим по формуле (17):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 0{,}3846.$$

Далее фиксируем номер шага $i = 1$, $x_1 = 0 + ih = 0{,}1$, $y(x_1) = y_1 \approx 0{,}3846$, вычисляем величины k_1, k_2, k_3, k_4 по формулам:

$$k_1 = h\cdot f(x_1, y_1);\quad k_2 = h\cdot f\left(x_1+0{,}05, y_1+k_1/2\right);$$

$$k_3 = h\cdot f\left(x_1+0{,}05, y_1+k_2/2\right);\ k_4 = h\cdot f\left(x_1+0{,}1, y_1+k_3\right)$$

и значение y_2.

Затем выполняем все это для i = 2, 3, 4, вычисляя на каждом шагу значения k_1, k_2, k_3, k_4 по формулам (17), а следующее значение y_{i+1} по формуле (16).

Результаты расчетов по шагам оформляем в виде рабочей таблицы:

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0	0,4	–0,32	–0,0145	–0,0159	0,0005	0,3846
1	0,1	0,3846	0,0004	0,0154	0,0142	0,0282	0,3993
2	0,2	0,3993	0,0281	0,0408	0,0398	0,0514	0,4394
3	0,3	0,4394	0,0514	0,0617	0,0608	0,0700	0,5005
4	0,4	0,5005	0,0699	0,0777	0,0768	0,0833	0,5775

В итоге получаем таблицу приближенных значений решения задачи Коши $y(x)$ на промежутке [0; 0,5] с шагом $h = 0{,}1$.

Ответ: приближенное решение задачи Коши получено в виде таблицы значений $y_i \approx y(x_i)$.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	0,4	0,3846	0,3993	0,4394	0,5005	0,5775

Задача 7. Температура однородного стержня $U = U(x, t)$ в сечении x в момент времени t удовлетворяет уравнению теплопроводности. Используя метод сеток, найти решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ в области $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1{,}5, \\ 0 \le t \le 0{,}09 \end{cases}$ при заданных условиях:

начальное распределение температуры в стержне $U(x, 0) = \cos x$;

температура на концах стержня $U(0; t) = 2t + 1$, $U(1,5; t) = \cos(1,5)$.

Решение. Для решения используем сетку с шагом $h = 0,3$ по переменной x и с шагом $d = 0,015$ по переменной t. Введем следующие обозначения.

Узлы сетки: $x_i = ih$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $x_i \in [0; 1,5]$;

$t_k = kd$ для $k = 0,1, 2, 3, 4, 5, 6$, $t_k \in [0; 0,09]$.

Сеточная функция: $u_{i,k} = u(i, k)$ для $i = 0, \ldots 5$, $k = 0, \ldots 6$, соответствующая приближенному решению задачи, т.е. $u_{i,k} \approx U(x_i, t_k)$.

В данном случае шаг $d = 0,015$ удовлетворяет условию $d = h^2/6 = 0,09/6$, поэтому расчетные формулы для вычисления всех значений функции $U(x_i, t_k) = u_{i,k}$ в узлах сетки, покрывающей область D, будем получать по формулам (21) – (24).

Результаты вычислений будем заносить в таблицу, построенную в соответствии с заданной сеткой, и имеющей вид:

	i	0	1	2	……	5
k	x_i / t_k	0	0,3	0,6	……	1,5
0	0	$u_{0,0}$	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$	……	$u_{5,0}$
1	0,015	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	……	$u_{5,1}$
……	……	……	……	……	……	……
6	0,09	$u_{0,6}$	$u_{1,6}$	$u_{2,6}$	……	$u_{5,6}$

В этой таблице нужно заполнить затененные ячейки значениями $u_{i,k}$.

Порядок заполнения таблицы следующий.

1. Заполняем 0-й столбец (температура на левом конце стержня в момент времени t_k): $u_{0,k} = 2t_k + 1$, для $k = 0,1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2. Заполняем последний столбец (температура на правом конце стержня в момент времени t_k): $u_{5,k} = \cos(1,5)$ для $k = 0,1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. Заполняем внутренние ячейки 0-й строки (начальная температура в точках с абсциссой x_{i}): вычисляем $u_{i,0} = \cos(x_i)$ для $i = 1, 2, 3, 4$.

4. Вычисляем значения $u_{i,k}$ во внутренних узлах сетки:

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,k} + 4u_{i,k} + u_{i+1,k}) \text{ для } i = 1, 2, 3, 4,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Вычисления производятся по строкам, значения $u_{i-1,\,k}$, $u_{i,\,k}$ и $u_{i+1,\,k}$ берутся из предыдущей строки. Например, 1-я строка ($k + 1 = 1$):

$$u_{1,\,1} = (u_{0,\,0} + 4\cdot u_{1,\,0} + u_{2,\,0})/6 = (1 + 4\cdot 0{,}9553 + 0{,}8253)/6 \approx 0{,}9411;$$

$$u_{2,\,1} = (u_{1,\,0} + 4\cdot u_{2,\,0} + u_{3,\,0})/6 = (0{,}9553 + 4\cdot 0{,}8253 + 0{,}6216)/6 \approx 0{,}8131;$$

$$u_{3,\,1} = (u_{2,\,0} + 4\cdot u_{3,\,0} + u_{4,\,0})/6 = (0{,}8253 + 4\cdot 0{,}6216 + 0{,}3624)/6 \approx 0{,}6124;$$

$$u_{3,\,1} = (u_{3,\,0} + 4\cdot u_{4,\,0} + u_{5,\,0})/6 = (0{,}6216 + 4\cdot 0{,}3624 + 0{,}0707)/6 \approx 0{,}3570.$$

После заполнения 1-й строки переходим к заполнению 2-й, затем 3-й и т.д., до 6-й строки.

В результате расчетов получаем таблицу:

	i	0	1	2	3	4	5
k	x_i / t_k	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
0	0	1	0,9553	0,8253	0,6216	0,3624	0,0707
1	0,015	1,03	0,9411	0,8131	0,6124	0,3570	0,0707
2	0,03	1,06	0,9346	0,8009	0,6032	0,3518	0,0707
3	0,045	1,09	0,9332	0,7903	0,5943	0,3469	0,0707
4	0,06	1,12	0,9355	0,7814	0,5857	0,3421	0,0707
5	0,075	1,15	0,9406	0,7745	0,5777	0,3375	0,0707
6	0,09	1,18	0,9478	0,7694	0,5705	0,3331	0,0707

Ответ: приближенное решение задачи получено в виде таблицы значений $u_{i,\,k} \approx U\,(x_i,\, t_k)$ в узлах сетки области D.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Численные методы: учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – М.: Наука,1987 248 с.

2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002.– 840 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов. В 2 ч. Ч.2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.– М.: Оникс: Мир и образование, 2005.– 416 с.

4. Воробьева, Г. Н., Данилова, А. Н. Практикум по численным методам / Г. Н. Воробьева, А.Н. Данилова.– М.: Высш. школа, 1979.– 184 с.

5. Мостовская Л.Г. Вычислительная математика: учебно-методическое пособие ч.1 / Л. Г. Мостовская, А.-В.И.Середа, – Мурманск, 2001. – 86 с.